

Машины нечёткого вывода

Нечёткий логический вывод

Нёчеткий логический вывод (fuzzy logic inference):

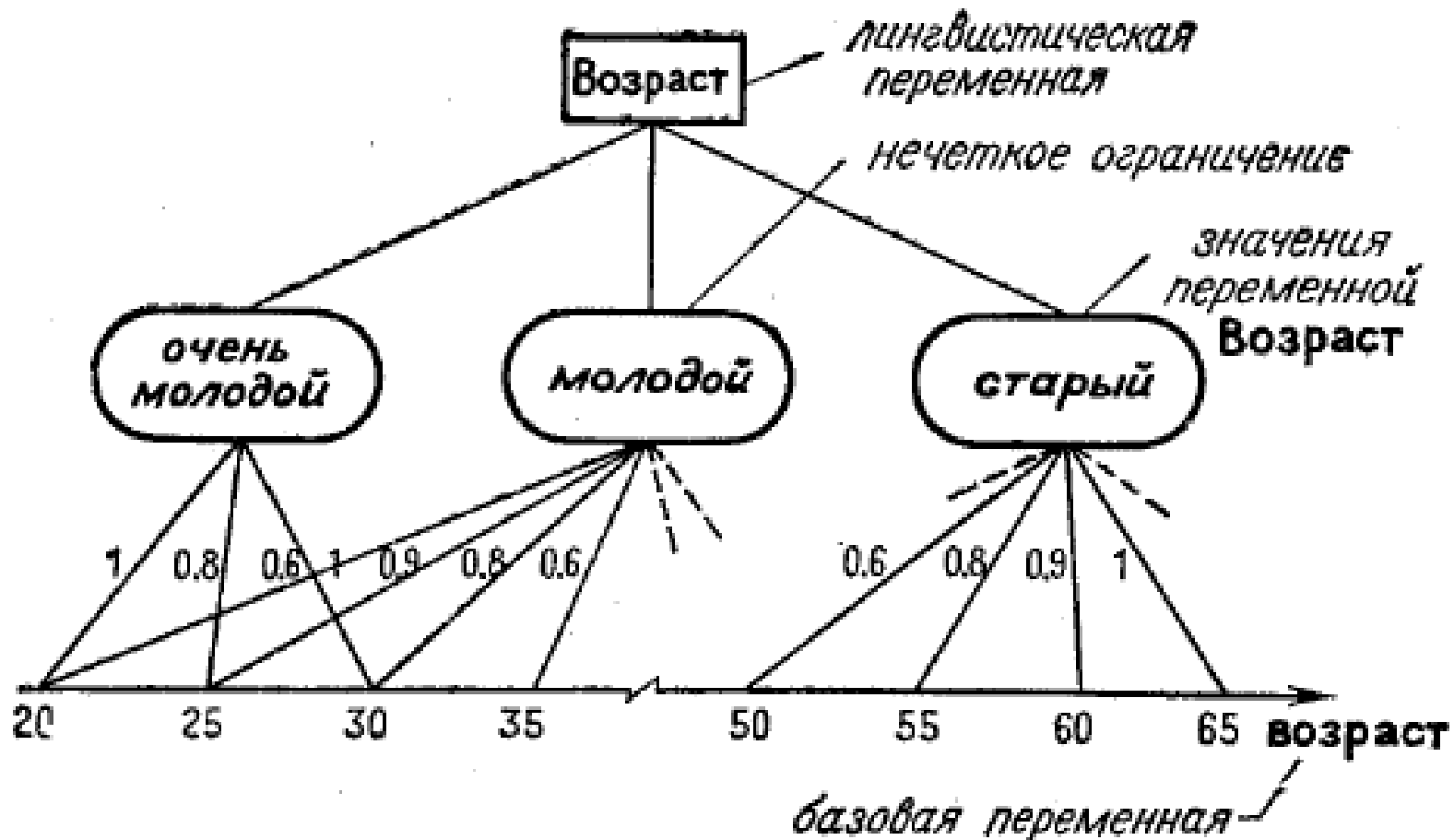
аппроксимация
зависимости
 $Y = f(X_1, X_2 \dots X_n)$
каждой
выходной
лингвистической
переменной от
входных
лингвистических
переменных



заключение в виде
нечёткого множества,
соответствующего
текущим значениям
входов, с использованием
нечёткой базы знаний и
нечётких операций

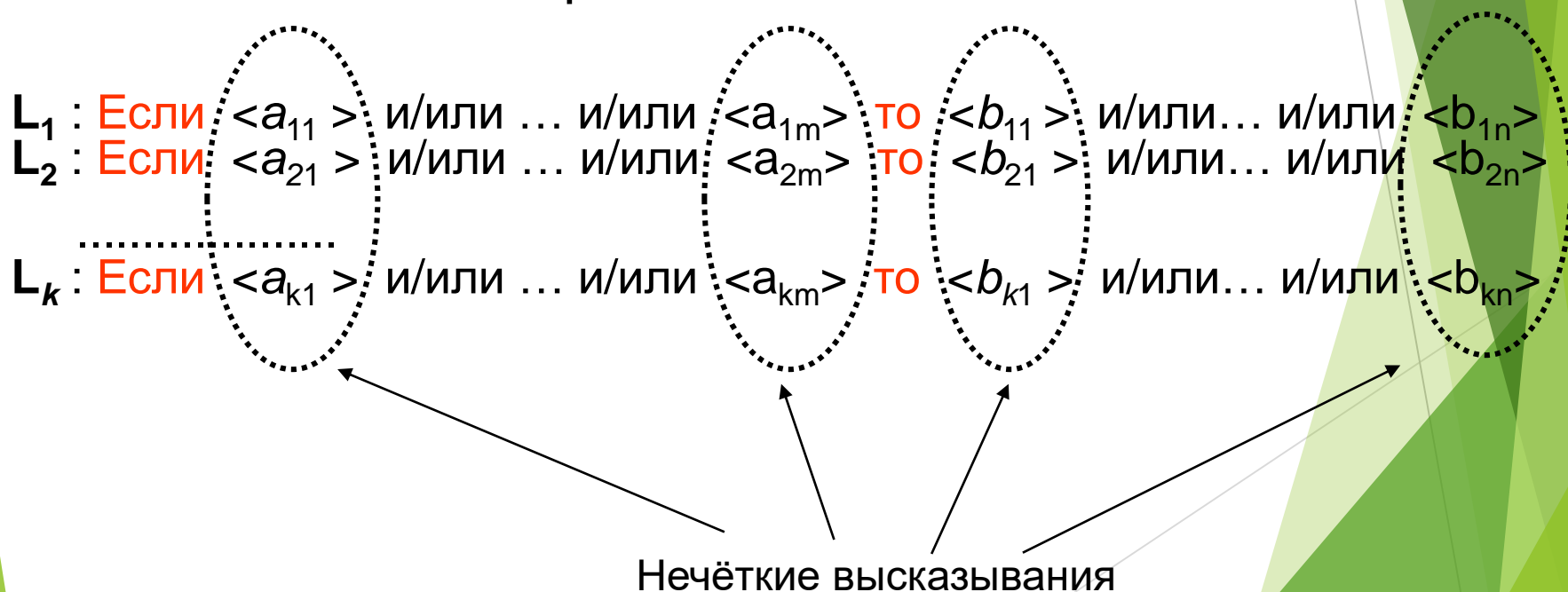
Основу нечёткого логического вывода составляет композиционное правило Лотфи Заде

Лингвистическая переменная

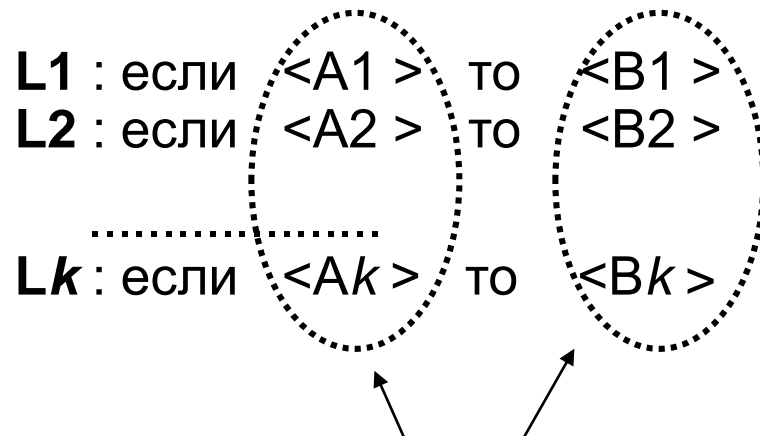


Нечёткий логический вывод

Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается в естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных.



Нечёткий логический вывод

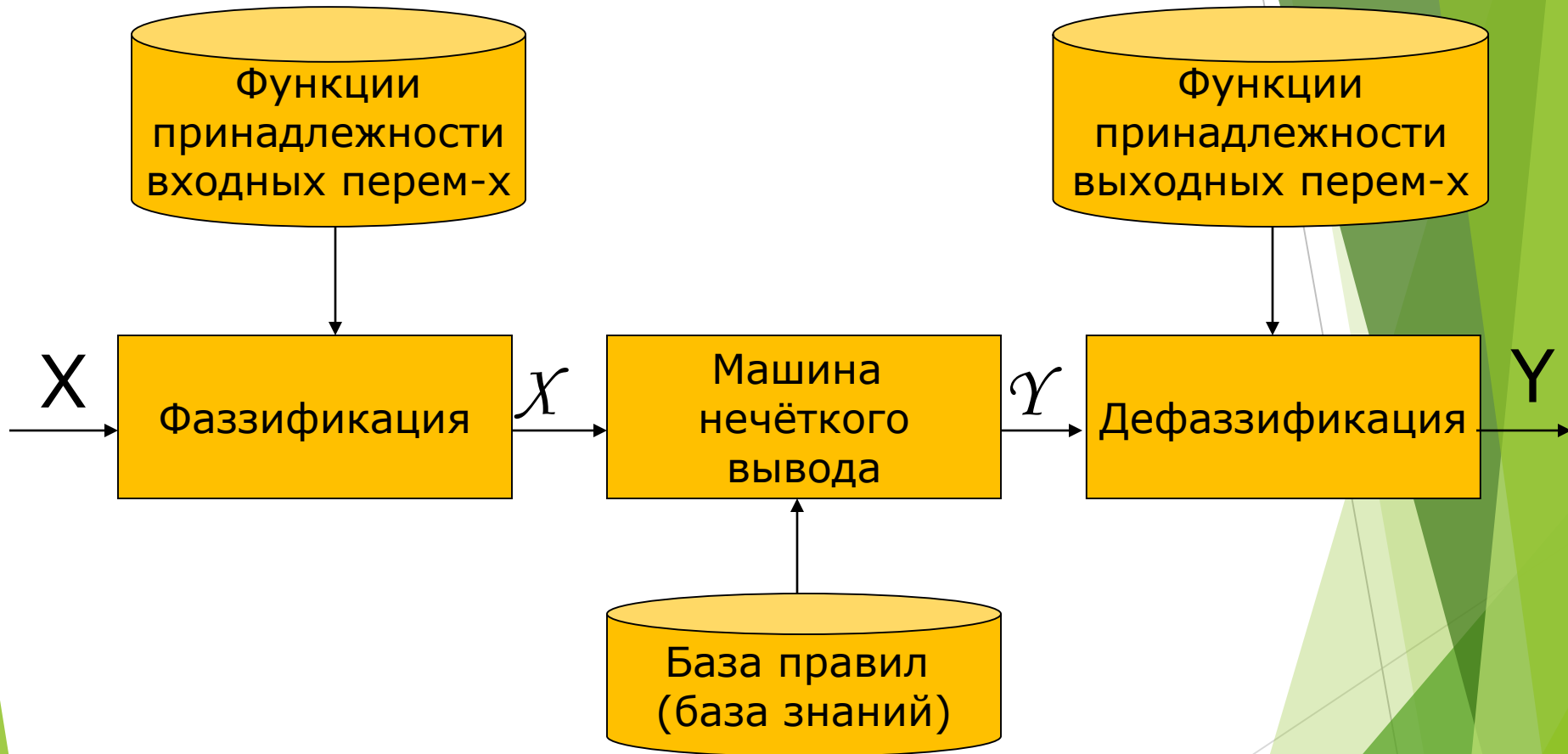


Нечёткие высказывания

Совокупность импликаций $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ является основой построения нечеткого отношения \mathbf{XRY} , заданного на произведении $X \times Y$ универсальных множеств входных и выходных переменных.

Отношение \mathbf{R} строится как $\cup_i L_i$.

Модуль нечёткого управления



Блок фаззификации

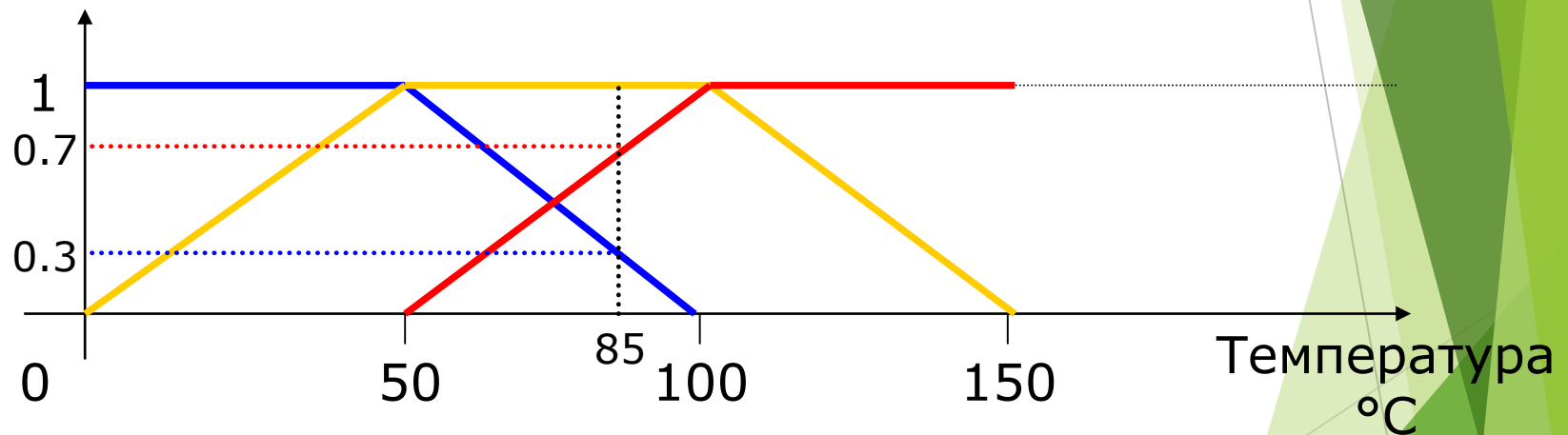
Вход: чёткая величина x_i .

Выход: степени уверенности простейших посылок.

Лингвистическая переменная: температура.

термы: низкая, высокая, средняя

Входное значение: 85°C



Термы:

- низкая
- средняя
- высокая

Выходные значения:

- температура низкая: 0.3
- температура средняя: 1
- температура высокая: 0.7

Нечёткая база знаний по Мамдани

Общий вид правил в базе знаний:

Если

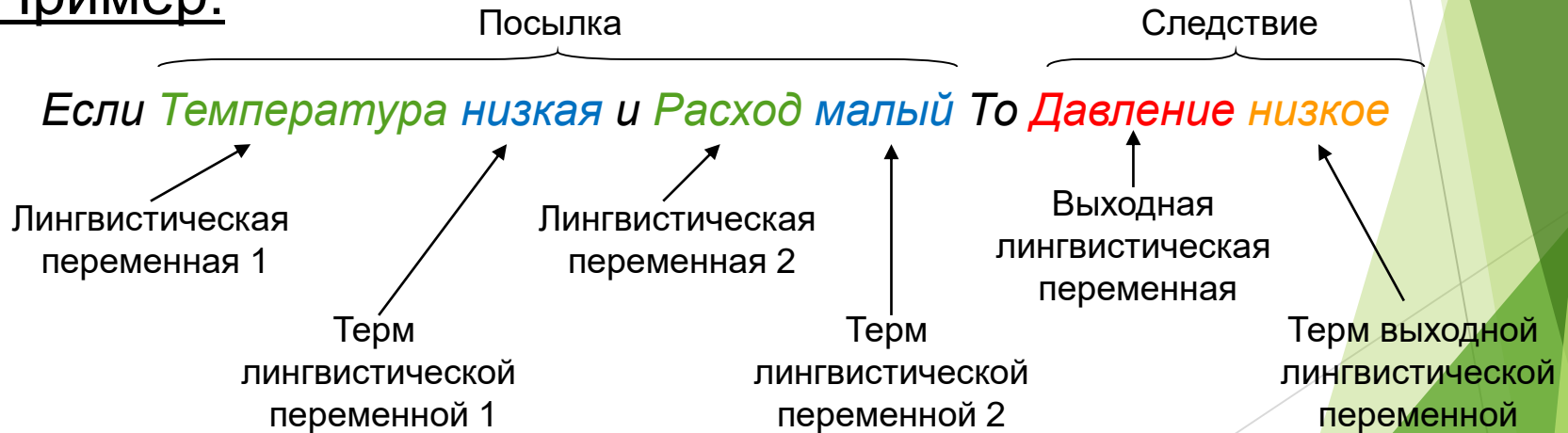
ЛП 1 есть Терм ЛП 1 и ЛП 2 есть Терм ЛП 2 и...

...и ЛП N есть Терм ЛП N

То

Выходная ЛП есть Терм Выходной ЛП.

Пример:



Машина нечёткого вывода по Мамдани

Вход: степени уверенности простейших посылок.

Выход: функция принадлежности нечёткого множества Y .

Вычисляется *степень истинности предпосылок* (левых частей) всех правил нечёткой базы знаний. Для этого используются t -нормы и s -нормы (в зависимости от операции \wedge или \vee).

Вычисляется *нечёткая переменная*, соответствующая правой части правила (используя один из способов построения нечёткой импликации).

Нечеткие множества, полученные для правых частей правил, накапливаются и объединяются для формирования единственного нечеткого множества – значения для выводимой лингвистической переменной.

Машина нечёткого вывода - пример

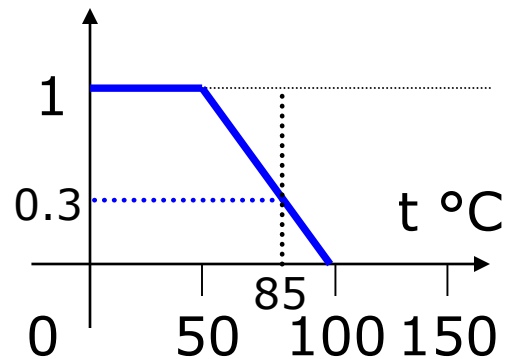
Этап 1. Вычисление выходов отдельных правил

Правило:

Если *Температура низкая* и *Расход малый* То *Давление низкое*

Вход:

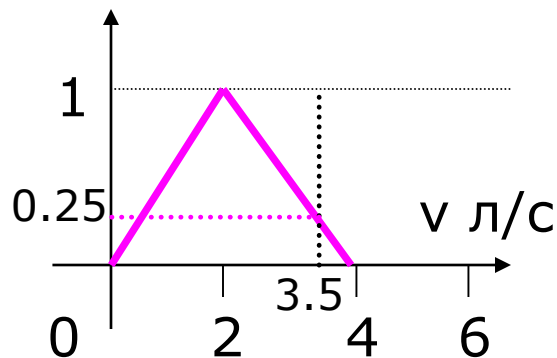
Температура = 85°C, Расход = 3.5 л/с



$$\mu_{t-\text{низкая}}(85) = 0.3$$

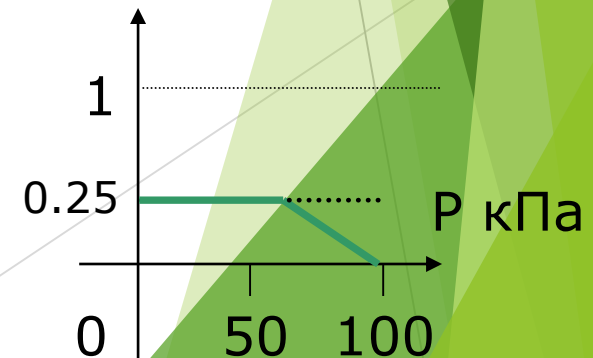
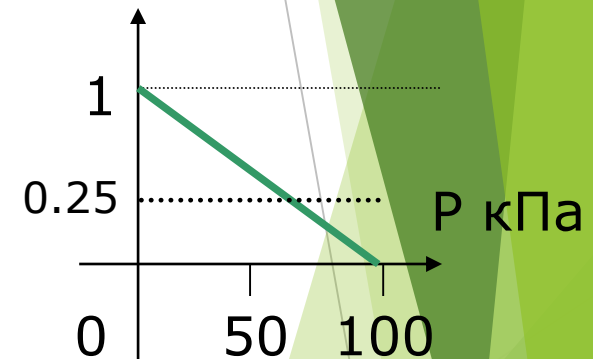
$$\mu_{v-\text{малый}}(3.5) = 0.25$$

$$\mu_{t-\text{низкая}}(85) \wedge \mu_{v-\text{малый}}(3.5) = \\ = \min\{0.3, 0.25\} = 0.25$$



$$\mu_p = \min\{0.25, \mu_{p-\text{низкое}}\}$$

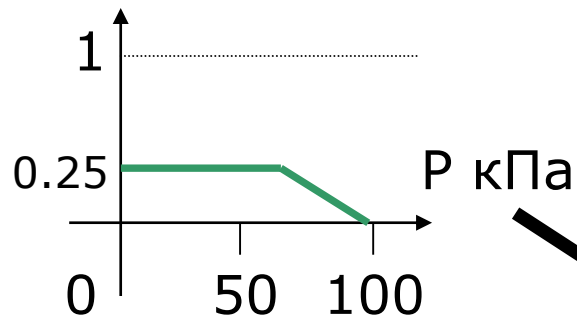
импликация по Мамдани



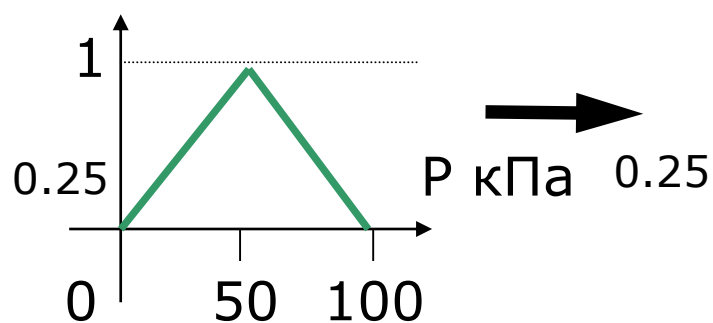
Машина нечёткого вывода - пример

Этап 2. Аккумуляция и композиция результатов

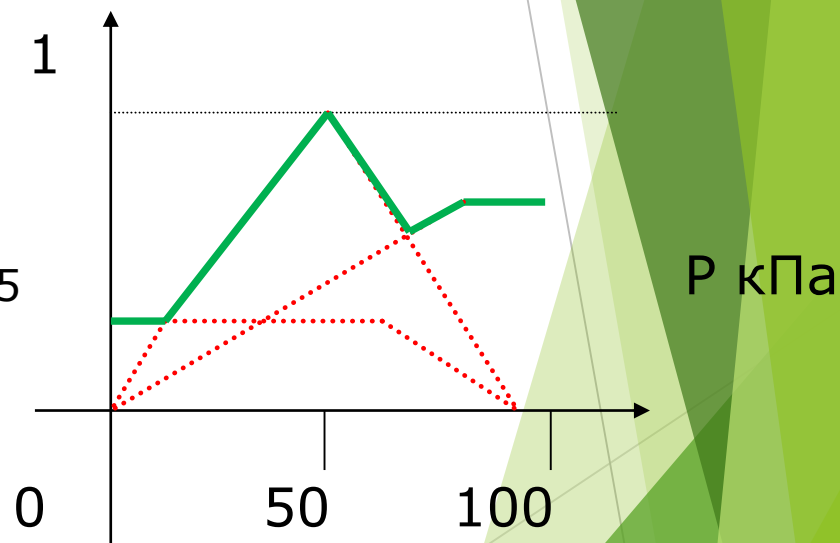
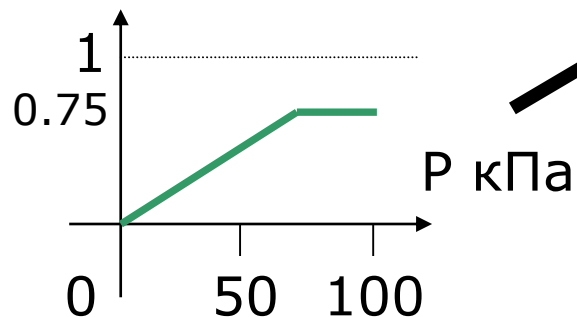
Правило 1:



Правило 2:



Правило 3:



Блок дефаззификации

Вход: функция принадлежности для Y .

Выход: чёткое значение y .

Используется, когда необходимо от полученного нечёткого множества перейти к конкретному числовому значению.

Для данного этапа существует множество методов.

Способы дефаззификации

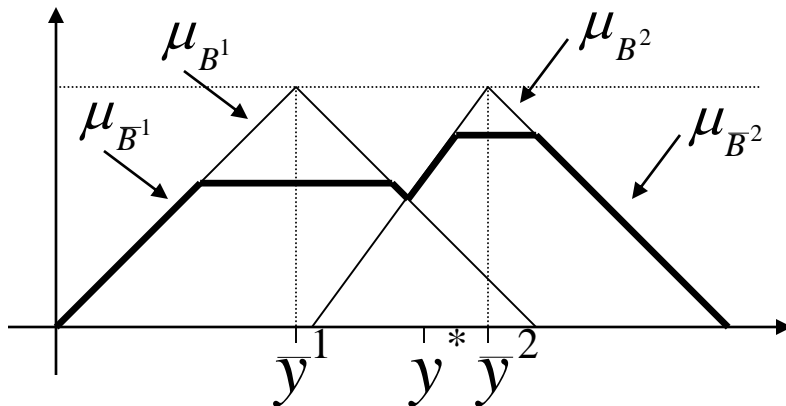
1. По среднему центру

Пусть имеется N нечётких множеств B^k .

$$y^* = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \bar{y}^k}{\sum_{k=1}^N \mu_{B^k}(\bar{y}^k)},$$

где \bar{y}^k - точка, в которой функция принадлежности нечёткого множества B^k максимальна:

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = \arg \max \mu_{B^k}(y)$$



Способы дефаззификации

2. По сумме центров

Пусть имеется N нечётких множеств B^k .

$$y^* = \frac{\int_Y y \sum_{k=1}^N \mu_{B^k}(y) dy}{\int_Y \sum_{k=1}^N \mu_{B^k}(y) dy}$$

Способы дефаззификации

3. Метод центра тяжести (полной интерпретации)

Пусть имеется итоговое нечёткое множество B' .

$$y^* = \frac{\int_Y y \mu_{B'}(y) dy}{\int_Y \mu_{B'}(y) dy} = \frac{\int_Y y \max_k \mu_{B^k}(y) dy}{\int_Y \max_k \mu_{B^k}(y) dy}$$

Способы дефаззификации

4. Метод максимума

Пусть имеется итоговое нечёткое множество B' .

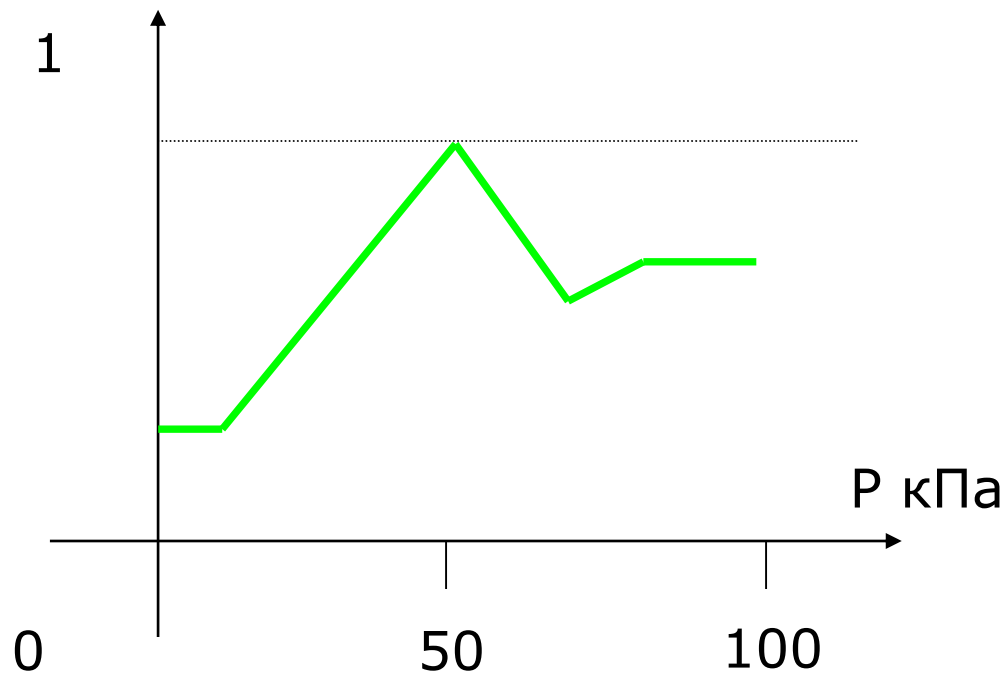
$$y^* = \arg \max_Y \mu_{B'}(y)$$

Разновидности:

- первый максимум
- средний максимум

...

Блок дефаззификации - пример



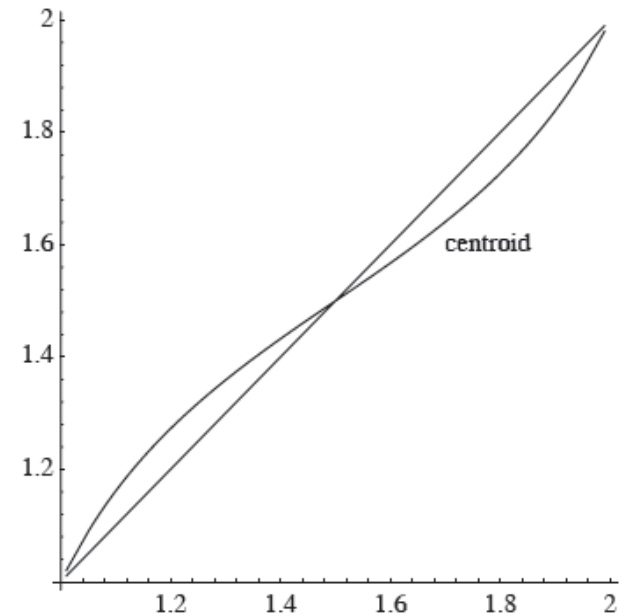
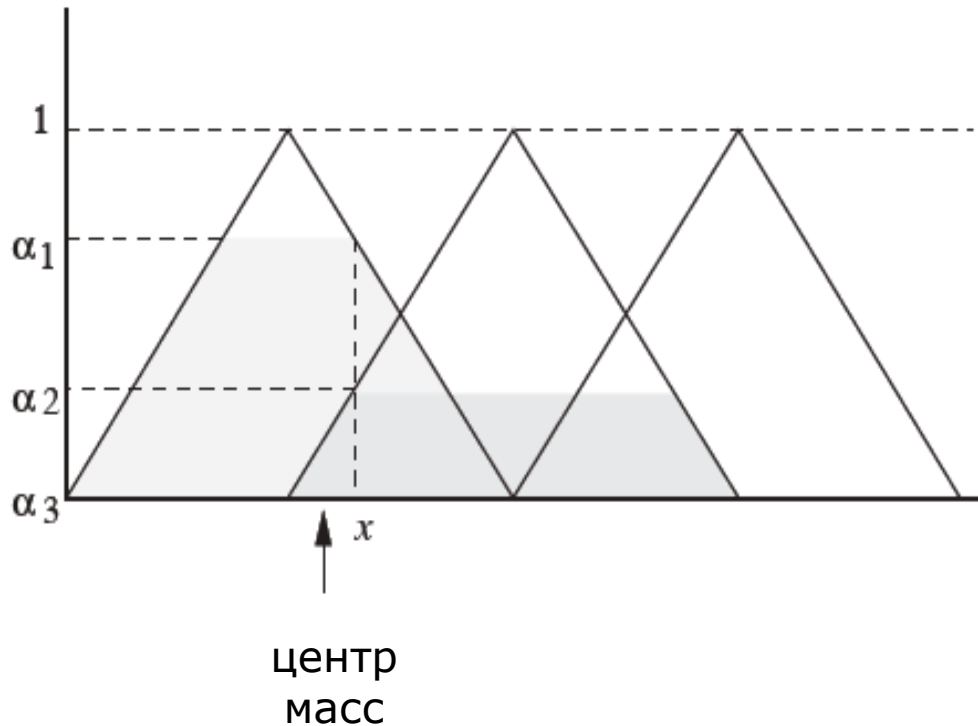
Первый максимум
 $P=50$ кПа

Центр тяжести
 $P=43.9393$ кПа

Точность дефаззификации

Метод центра масс

$$x \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow \tilde{x}$$



Отклонение не более 10%

Метод нечёткого управления Сугено

В методе нечёткого управления Такаги-Сугено следствия правил в базе знаний имеют вид обычной (чёткой) функциональной зависимости от чётких значений входных переменных $y=f(x_1, \dots, x_n)$.

Если все f – числа, то такой метод управления называют **методом Сугено нулевого порядка**.

Если все f – линейные функции, то метод называют **методом Сугено 1-го порядка**.

База знаний по Сугено

Общий вид правил в базе знаний Сугено:

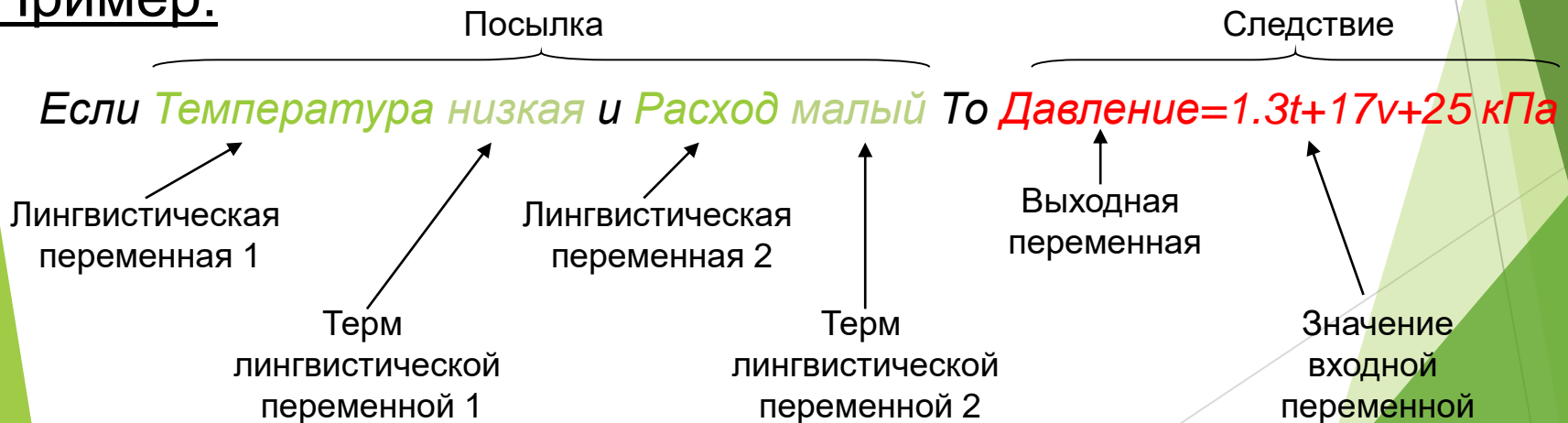
Если

ЛП 1 есть Терм ЛП 1 и ЛП 2 есть Терм ЛП 2 и ...

.... и ЛП N есть Терм ЛП N

То Выходная Переменная есть $f(x_1, \dots, x_n)$

Пример:



Метод нечёткого управления Сугено

Алгоритм вычисления:

L_i : если $x_1 = A_1^i$ и ... и $x_n = A_n^i$ то $y = f^i(x_1, \dots, x_n)$

Для каждого правила вычисляется его результат y_i и уровень активации w_i как t-норма (или s-норма при «или») от степеней уверенности предпосылок:

$$y_i = f^i(x_1, \dots, x_n), \quad w_i = \mu_{A_1^i}(x_1) \circ^T \dots \circ^T \mu_{A_n^i}(x_n)$$

Результат композиции правил вычисляется как взвешенная сумма результатов отдельных правил, умноженных на соответствующие уровни активации:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

Машина нечёткого вывода Сугено

Этап 1. Вычисление выходов отдельных правил

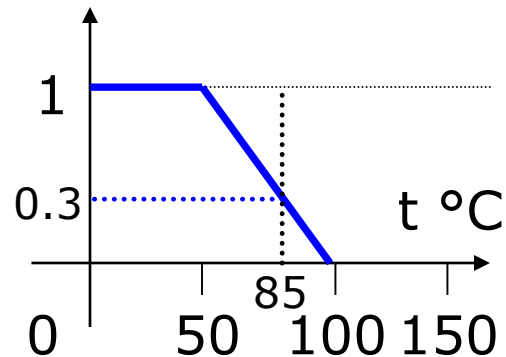
Правило:

Если *Температура низкая* и *Расход малый*

То *Давление = 1.3t + 17v + 25 кПа*

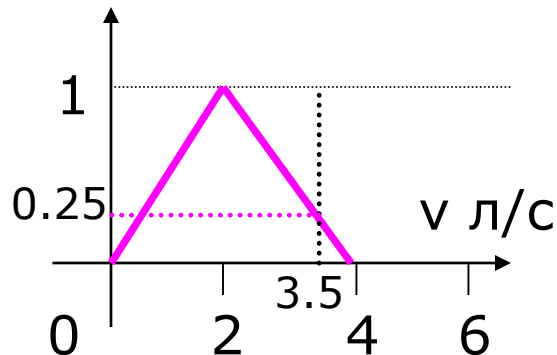
Вход:

Температура = 85°C, Расход = 3.5 л/с



$$\mu_{t\text{-низкая}}(85) = 0.3$$

$$\mu_{v\text{-малый}}(3.5) = 0.25$$



$$w_1 = \mu_{t\text{-низкая}}(85) \circ^T \mu_{v\text{-малый}}(3.5) = \\ = \min\{0.3, 0.25\} = 0.25$$

$$P_1 = 1.3 \cdot 85 + 17 \cdot 3.5 + 25 = 195 \text{ кПа}$$

Машина нечёткого вывода Сугено

Этап 2. Аккумуляция и композиция результатов

Правило 1:


$$P_1 = 195 \text{ кПа}$$
$$w_1 = 0.25$$


Правило 2:


$$P_2 = 130 \text{ кПа}$$
$$w_2 = 1$$

Правило 3:

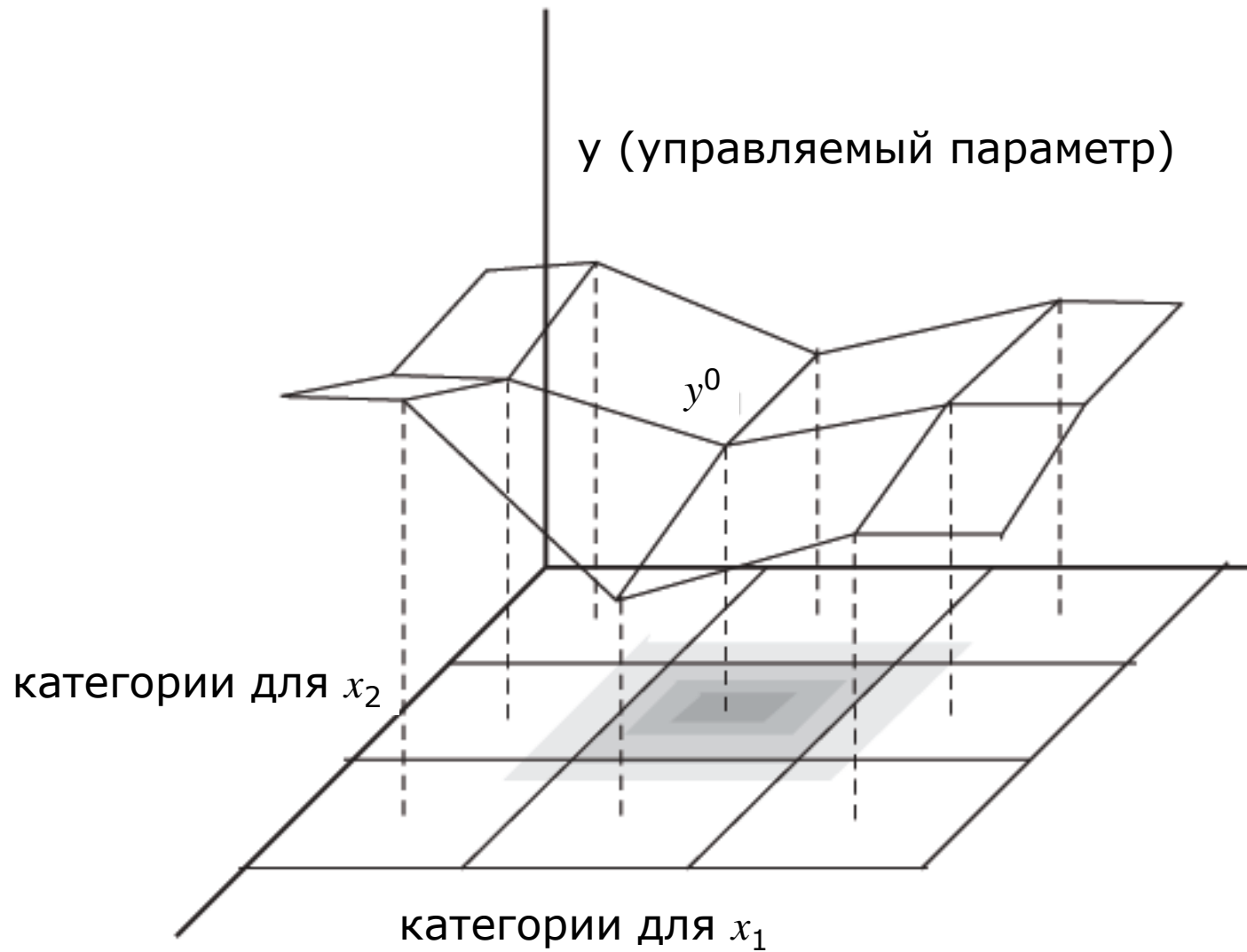
$$P_3 = 125 \text{ кПа}$$
$$w_3 = 0.56$$


$$P = \frac{P_1 w_1 + P_2 w_2 + P_3 w_3}{w_1 + w_2 + w_3} =$$

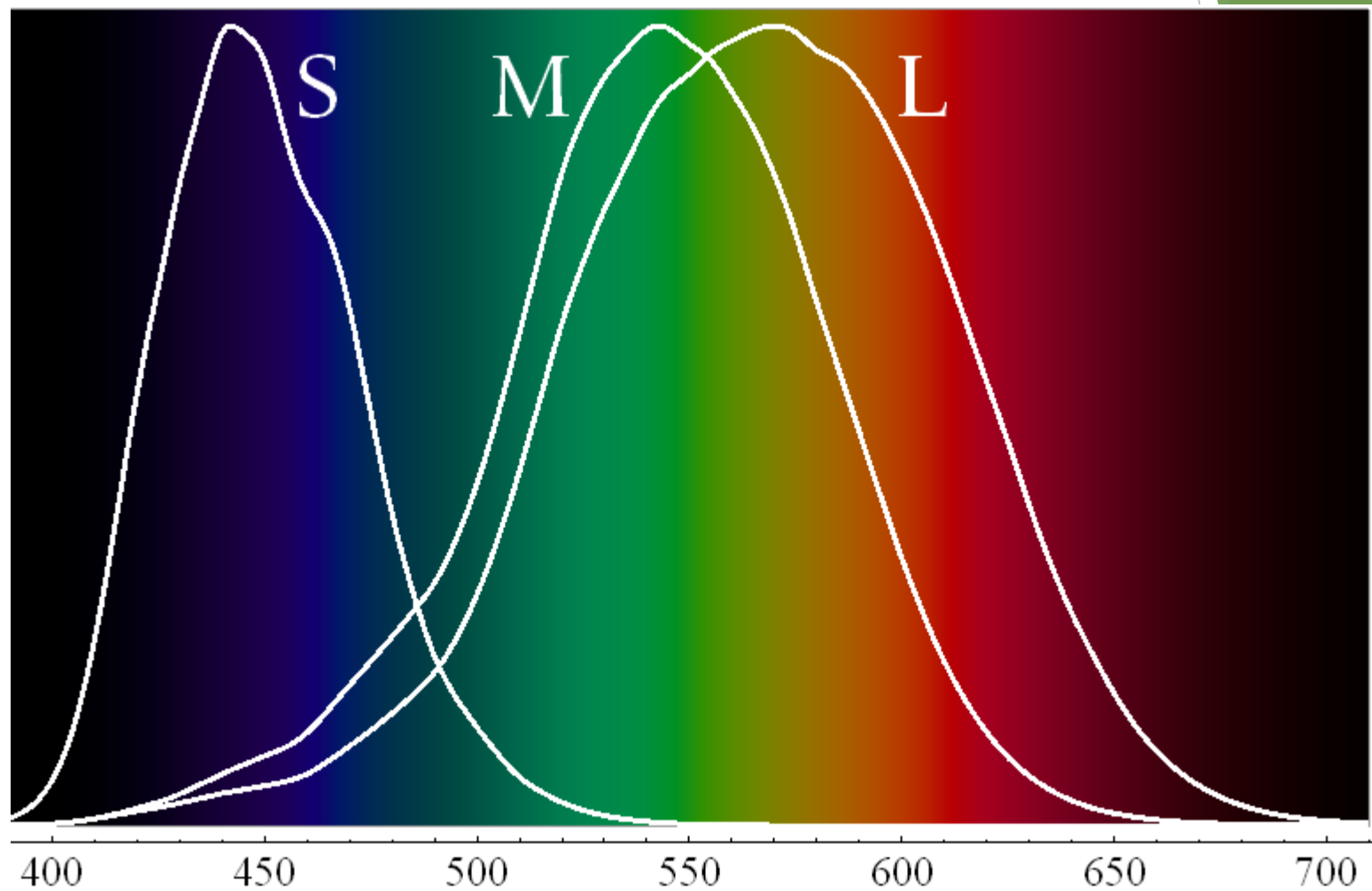

$$= \frac{195 \cdot 0.25 + 130 \cdot 1 + 125 \cdot 0.56}{0.25 + 1 + 0.56} =$$


$$= \frac{248.75}{1.81} = 137.43 \text{ кПа}$$

Аппроксимация функций нечётким контроллером



Зрение как нечёткая система



Задача

- ▶ Два входа, диапазон сигнала $[0,1]$
- ▶ Терм-множества: малый - $\text{tr}(0.1,0.3,0.3)$, средний - $\text{tr}(0.5,0.3,0.3)$, большой - $\text{tr}(0.9,0.3,0.3)$.
- ▶ t-норма: произведение
- ▶ Модель нечёткого вывода Sugeno 0.
- ▶ Правые части правил:

$x_2 \backslash x_1$	Малый	Средний	Большой
Малый	2	7	6
Средний	9	5	1
Большой	4	3	8

- ▶ Определите выход системы для входа $(0.1,0.3)$

$$y_i = f^i(x_1, \dots, x_n), \quad w_i = \mu_{A_1^i}(x_1) \circ^T \dots \circ^T \mu_{A_n^i}(x_n), \quad y = \frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$